# Cours 2 : formulations fortes et faibles, formulation de Galerkin et éléments finis de degré 1

# Introduction à la méthode des EF

## Cours 2: On reprend le pb de la corde suspendue sur 2 appuis

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions $c$ et $f$ continues sur l'intervalle $[0,1]$, trouver une fonction $u$ deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{aligned} & -u''(x)+c(x)u(x)=f(x) \qquad \text{si } 0<x<1, \\ & u(0)=u(1)=0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

(Pb 10.1 dit pb fort)

On multiplie par une fonction v une fois continuement dérivable sur [0,1] et on intègre de 0 à 1:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx+\int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx=\int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties le premier terme, nous avons :

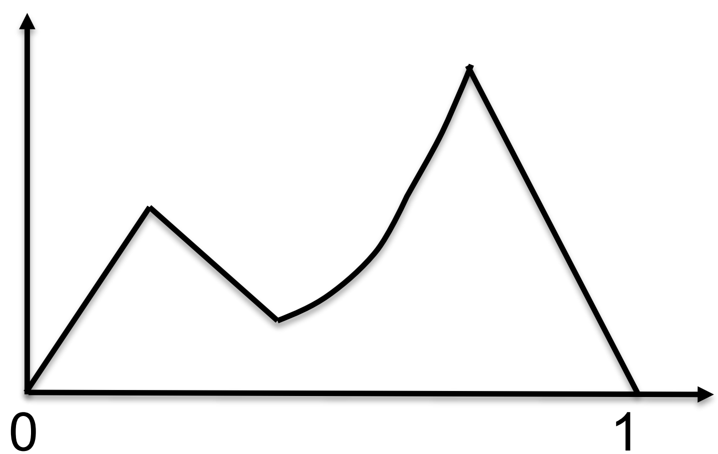
$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx$$
$$= \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

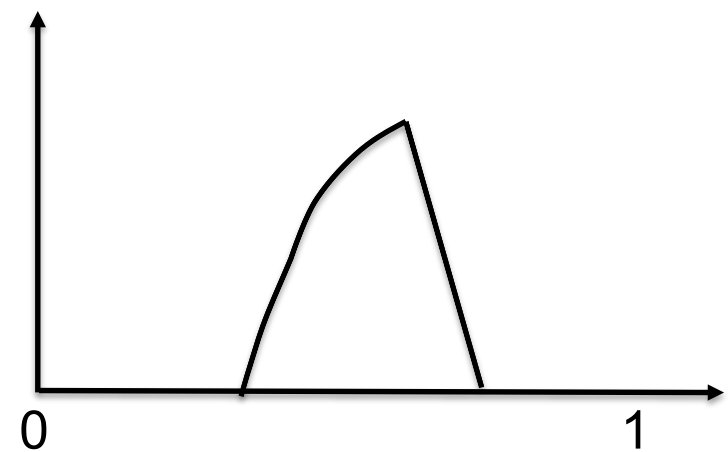
Si nous imposons à la fonction $v$ d'être nulle en $x = 0$ et $x = 1$, alors nous en déduisons l'égalité :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{10.9}$$

Définition de l'espace vectoriel V:

V est l'ensemble de toutes les fonctions g continues, **de première dérivée g' continue par morceaux** et telles que g(0)=g(1)=0.
g' est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points de [0,1] ou g' n'existe pas mais possède des limites à gauche à droite.
La somme de 2 fonctions de V reste un élément de V et le produit d'une fonction g par un nombre réel aussi: V est bien un e.v.




Deux fonctions appartenant à l'ev V. (NB: V est de dimension infinie)

# Introduction à la méthode des EF

Nous cherchons u dans V telle que pour tout v de V, nous avons

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \qquad \text{(Pb 10.9)}$$

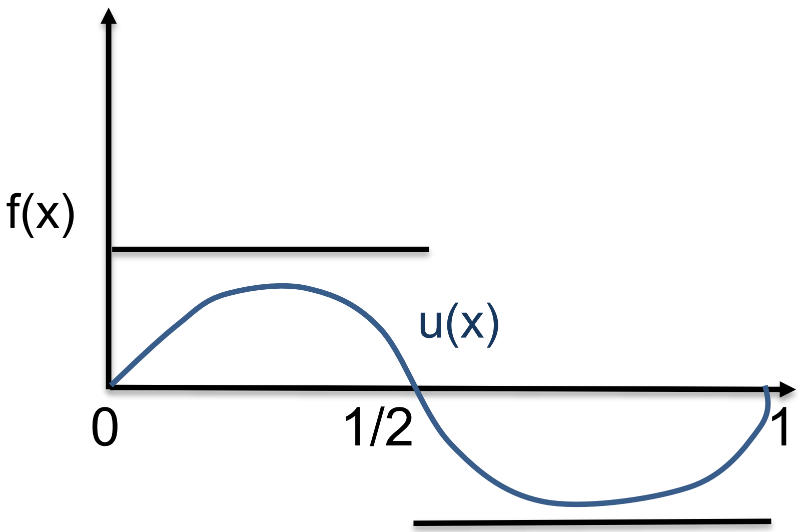
Le problème 10.9 (Pb 10.9) est appelé problème faible ou formulation variationnelle.

Le problème faible ne fait intervenir que u’(x) alors que le pb fort fait intervenir u’’(x): les solutions du pb faible sont moins régulières que celles du pb fort.

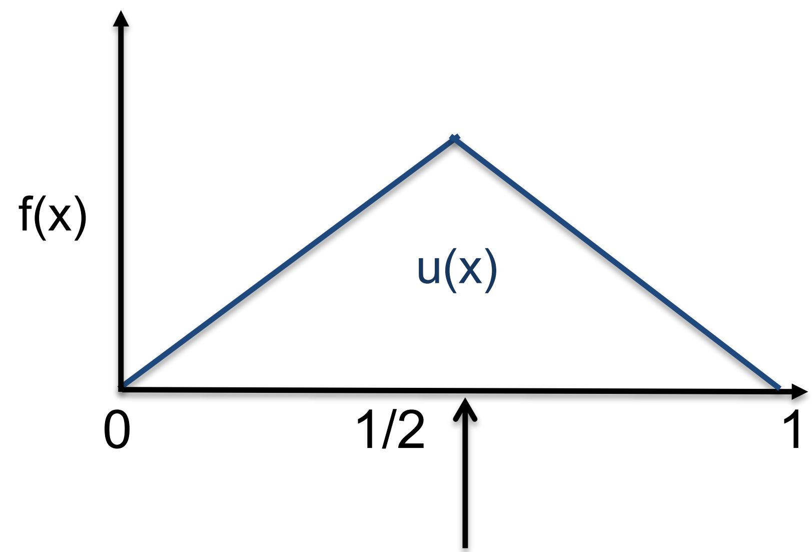
Toute solution du pb fort est solution du pb faible.
**De plus, on montre que si c(x) ≥ 0 sur [0,1] alors le pb faible a une et une seule solution qui est celle du pb fort.**

# Introduction à la méthode des EF

Inversement, toute solution du pb faible (Pb 10.9) n'est pas forcément solution du problème fort ( $-u''(x) + c(x)\, u(x) = f(x)$ ):
voici 2 exemples: u est solution du pb faible mais pas du pb fort car f(x) ou u''(x) n'existe pas en 1/2




f n'est pas continue en ½




u'' n'existe pas en ½.

La méthode de Galerkin est basée sur la formulation faible du pb. alors que que la méthodes des différences finies est basée sur la formulation forte.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ sont $N$ fonctions linéairement indépendantes de $V$, on peut construire un sous-espace vectoriel de $V$, noté $V_h$, engendré par les combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_i$. Ainsi $V_h$ sera l'ensemble de toutes les fonctions $g$ qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i(x),$$

où les $g_i$ sont $N$ nombres réels.

NB: l'espace vectoriel $V_h$ (ou $V_N$) est de dimension finie au contraire de l'ev V qui lui est de dimension infinie.

# Introduction à la méthode des EF

Le pb faible revient à trouver une approximation de u notée $u_h$ € $V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \qquad (10.10)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$. On dira que (10.10) est une ***approximation de Galerkin*** de (10.9).

Puisque $u_h$ € $V_h$ , on peut écrire: $u_h(x) = \sum_{i=1} u_i \varphi_i(x),$

où $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sont $N$ nombres réels à déterminer.

**(10.10) doit être vérifiée pour tout $v_h$ € $V_h$ : il faut et il suffit que (10.10) soit vérifiée pour tous les $\varphi_j$ de la base de $V_h$, ce qui donne les N équations:**

$$\sum_{i=1}^N u_i \left( \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \right) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

que l'on réécrit sous la forme indicielle : $A_{ji}u_i = f_j$ avec $1 \leq i,j \leq N$

En définissant la matrice carrée NxN notée A par:

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \tag{10.12}$$

(dans le cas où $c = 0$, la matrice $A$ est appelée ***matrice de rigidité***), si $\vec{u}$ est le $N$-vecteur de composantes $u_1, u_2, \ldots, u_N$ et si $\vec{f}$ est le $N$-vecteur dont la $j^e$ composante est

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \tag{10.13}$$

alors les problèmes (10.10) ou (10.11) sont équivalents à chercher $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \tag{10.14}$$

Le pb (10.14) est une discrétisation du problème fort (10.1).
La méthode de Galerkin, tout comme celle des différences finies, requiert la résolution d'un système linéaire.

# Introduction à la méthode des EF

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin.

Elle est basée sur un choix judicieux des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de Vh de sorte que:

- la matrice A soit une matrice creuse par exemple une matrice bande car il existe des méthodes numériques bien adaptées pour l'inverser,
- la solution $u_h$ converge, dans un certain sens, vers la solution du pb faible lorsque le nombre N de fonctions de base de Vh augmente.

NB: Lorsque la dimension de Vh, N, augmente, Vh «tend» vers l'espace vectoriel V.

# Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

## Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

On part de la méthode de Galerkin qui consiste à chercher $u_h$ dans $V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \qquad (10.10)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$.

Avec des fonctions d'interpolation linéaire, la méthode est dite de degré 1.

Divisons l'intervalle $[0,1]$ en $N+1$ parties ($N$ étant un entier positif) et posons $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$, comme dans la figure 10.3. On définit, pour $i = 1, 2, \ldots, N$, les fonctions suivantes :

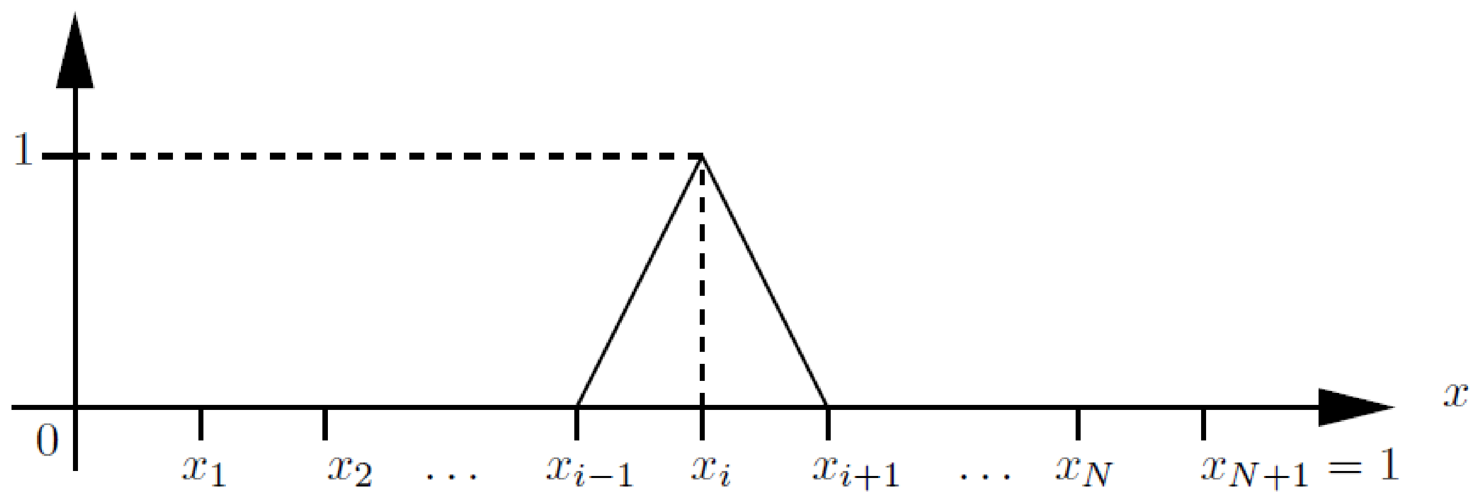
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\[2ex] \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\[2ex] 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases} \qquad (10.18)$$

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

Les N fonctions $\varphi_i(x)$ appartiennent à V, e.v. (espace vectoriel) des fonctions à dérivées continues par morceaux. Elles sont linéairement indépendantes et forment donc une base discrète de Vh de dimension N (h = 1/(N+1)).
Les N fonctions $\varphi_i(x)$ sont telles que:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad 0 \leq j \leq N+1,$$

$$\varphi_{i_{|[x_{j-1},x_j]}} \text{ est un polynôme de degré un, } 1 \leq j \leq N+1.$$

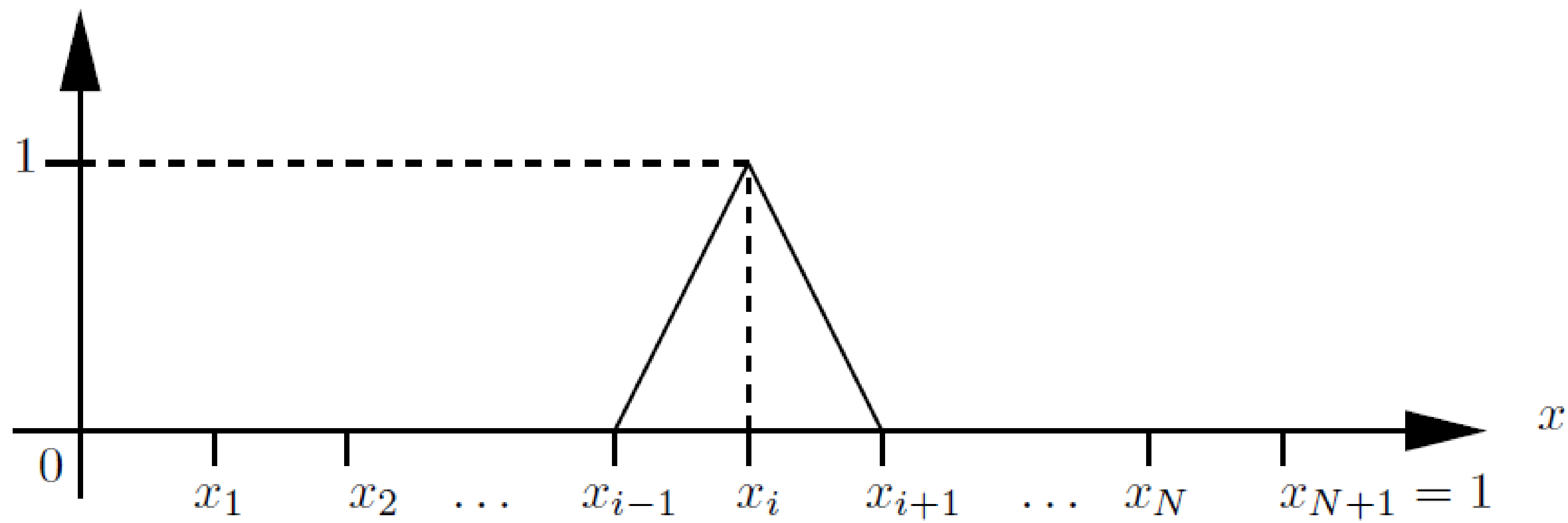



Fonction $\varphi_i(x)$ centrée en xi (appelée fonction chapeau)

# Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Nous définissons:

- $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ sont les ***nœuds de la discrétisation***,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les ***éléments géométriques***,
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace $V_h$ de type ***éléments finis de degré 1*** associées aux nœuds intérieurs $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

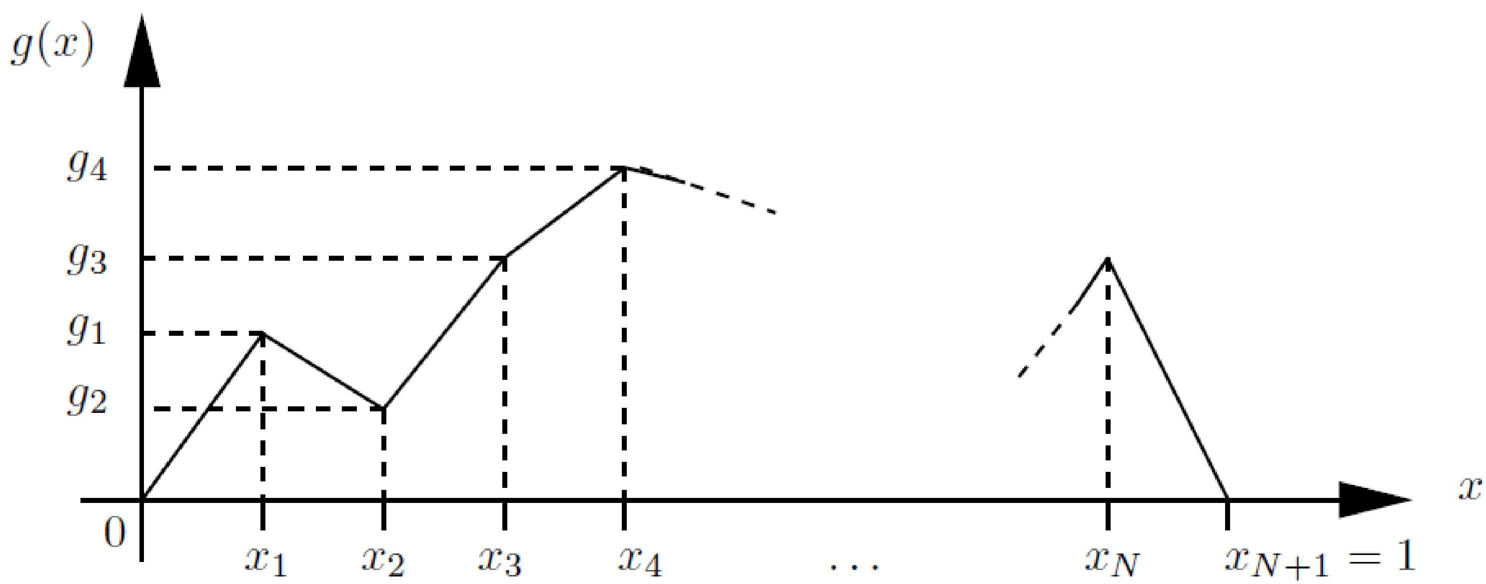


Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

Si $g \in V_h$, alors $g$ est une combinaison linéaire des $\varphi_i$, i.e.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i(x),$$

et le graphe de $g$ est représenté dans la figure 10.5. En particulier, nous remarquons, en vertu de (10.19), que $g(x_j) = g_j$, $1 \leq j \leq N$, que $g(0) = g(1) = 0$ et que $g$ est une fonction affine sur chaque élément géométrique.



Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

**Formulation faible du pb:** trouver u tel que pour tout v de V:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{10.9}$$

**Approximation de Galerkin**: trouver $u_h$ de Vh tel que pour tout $v_h$ de Vh:

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \tag{10.10}$$

On munit l'ev V de la norme $|g|_1$ pour les fonctions à dérivée de carré sommable:

$$|g|_1 = \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx\right)^{1/2} \text{ si } g \in V.$$

**Théorème 10.3** *On suppose que $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Soit $u$ la solution de (10.9) et soit $u_h$ la solution de (10.10) lorsque $V_h$ est engendré par les fonctions de base (10.18). Alors nous avons l'estimation d'erreur :*

$$|u - u_h|_1 \leq Ch, \tag{10.22}$$

*où $C$ est une constante indépendante de $N$ (et donc de $h$).*

## Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

La discrétisation par la méthode de Galerkin requiert la résolution d'un système linéaire du style: $A_{ji} u_i = f_j$ avec $1 \le i,j \le N$

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx,$$

pour $1 \le i, j \le N$, ainsi que les composantes

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx \qquad \text{pour } 1 \le j \le N.$$

Nous vérifions que

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{10.23}$$

# Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

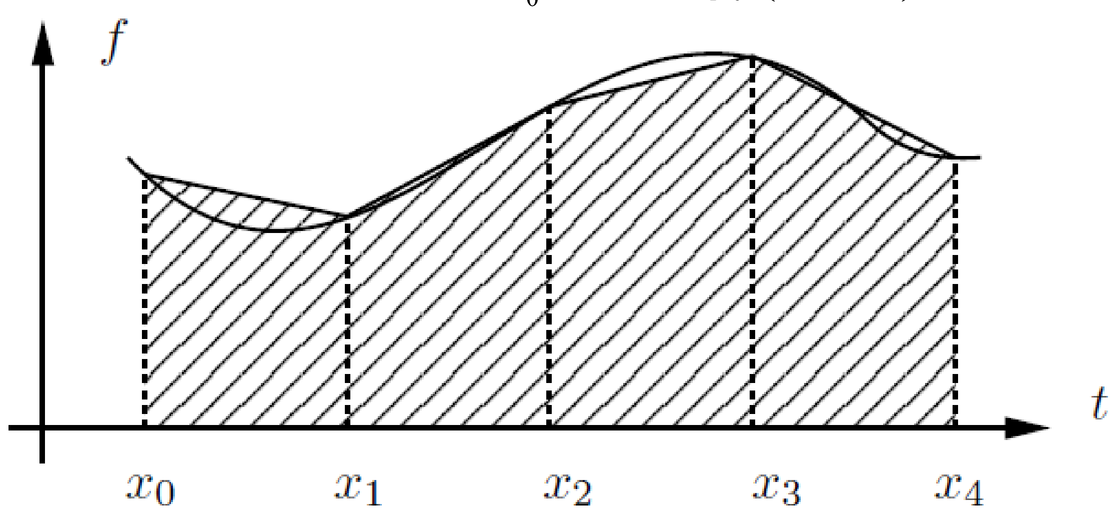
valeurs de $\int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$ et de $\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$,

Intégration numérique par la formule composite du trapèze:

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big). \tag{3.13}$$

La formule (3.13) est facile à interpréter graphiquement : la quantité $L_h(f)$ correspond à l'aire hachurée de la figure 3.2.

Soit l(x) une fonction intégrable sur [0,1], alors $\int_0^1 l(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\big(l(x_i)+l(x_{i+1})\big)$, somme des aires hachurées.



# Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Intégration numérique par la formule composite du trapèze avec h = constant

$$L_h(l) \simeq \int_0^1 l(x)dx \text{ est donnée par:}$$

$$L_h(\ell) = h\left(\frac{1}{2}\ell(x_0) + \ell(x_1) + \ell(x_2) + \cdots + \ell(x_N) + \frac{1}{2}\ell(x_{N+1})\right).$$

Nous vérifions aisément que

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \tag{10.24}$$

et

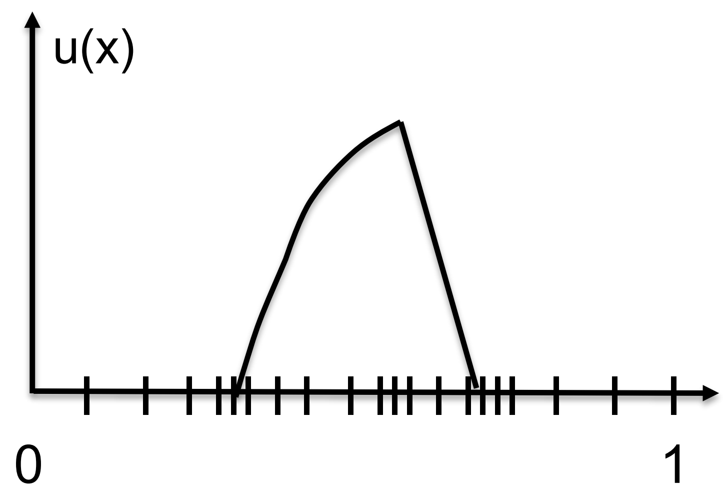
$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j). \tag{10.25}$$

# Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Nous obtenons un système linéaire identique à 1/h près à celui obtenu par la méthode des différences finies (cf. exo 2a)

Cependant, contrairement à la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis est très souple et se laisse facilement généraliser aux situations décrites ci-dessous.

Lorsque la distribution des points de discrétisation $(x_j)_{1\leq j\leq N}$ n'est pas uniforme, les fonctions $\varphi_i$ peuvent toujours être définies par (10.18). Ainsi, en concentrant les nœuds aux endroits de forte variation de la solution, les fonctions $\varphi_i$ peuvent engendrer un sous-espace $V_h$ de fonctions mieux adaptées au problème considéré.




Affinage local du maillage, là ou u varie fortement

## Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

**Exo2a:** Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions $c$ et $f$ continues sur l'intervalle $[0,1]$, trouver une fonction $u$ deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{aligned} &-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \qquad \text{si } 0 < x < 1, \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Vérifiez les 3 formules suivantes pour les fonctions linéaires de degré 1 (chapeau) avec h =1(N+1), N > 0

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j).$$

Ecrire le système matriciel à résoudre sous la forme: $A\vec{u} = \vec{f}.$

Et montrer que ce système est identique à celui des différences finies.

**Exo2b:**

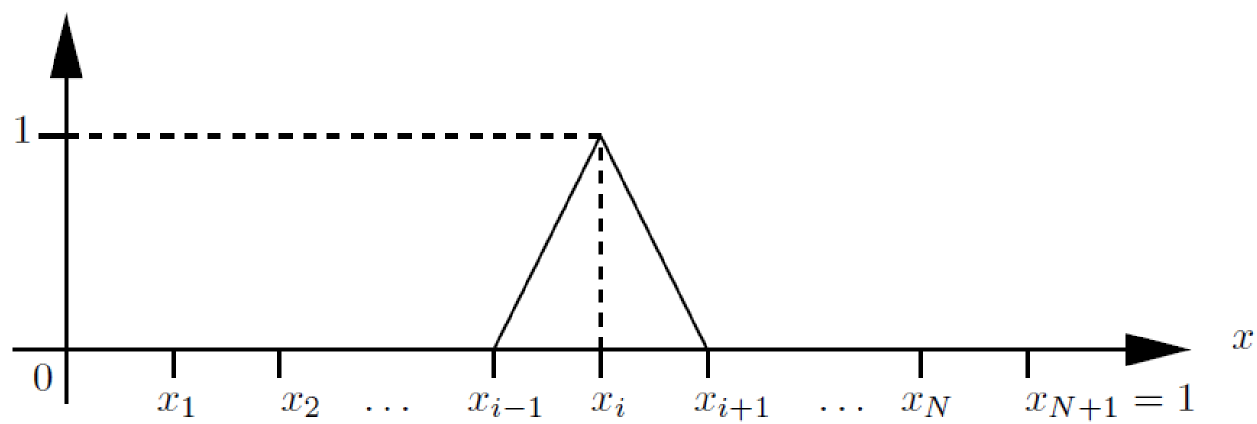
# Eléments finis 1D de degré 1

Soit f une fonction continue de [0.,1] dans R. On cherche u de [0.,1] dans R telle que:

$$-\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$

et $u(0) = u(1) = 0.$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant h = 1/(N+1) et xj = jh avec j = 0, 1, ....N+1. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour N = 4.



# Exo2c:

## Eléments finis 1D de degré 1

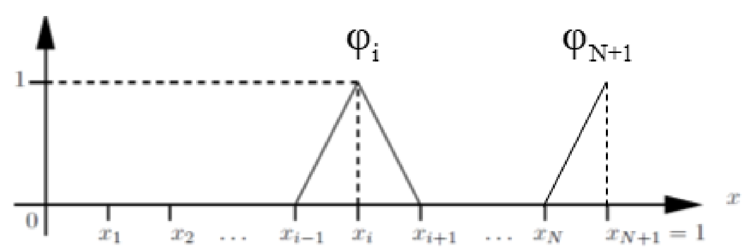
Soit f une fonction continue de [0.,1] dans R. On cherche u de [0.,1] dans R telle que:

$$-\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \quad \text{et } u(0) = 0 \text{ et } u'(1) = a$$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant h = 1/(N+1) et xj = jh avec j = 0, 1, ....N+1. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour N = 3. Comme la solution u(x) n'est pas connue en x = 1, on définit en plus la fonction linéaire $\varphi_{N+1}$ par :

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} & \text{si } x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe des fonctions $\varphi_i$ pour i=1,2, …N, N+1 est donc le suivant :



**Cours 3:**

éléments finis 1D de degré 2
problème elliptique et éléments finis 2D